

**РАСЧЁТ ДИНАМИКИ ЧАСТИЦ
В БЕЗЫЗЛУЧАТЕЛЬНОЙ МОДЕЛИ ПЛАЗМЫ**© 2010 г. *Л.В. Бородачёв, Д.О. Коломиец*

МГУ им. М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики.

E-mail: borodach2000@mail.ru, kolomiets@darwincode.org

В работе рассматривается неявная разностная схема для уравнений движения частиц, учитывающая специфику дарвинского приближения плазмы. Исследуются вопросы ее согласованности, точности и устойчивости; показывается адекватность передачи основных физических эффектов, связанных с движением зарядов в электромагнитном поле. На основе схемы предлагается оптимальный численный алгоритм, рассматриваются вопросы его эффективности.

Ключевые слова: метод макрочастиц, модель Власова-Дарвина, интегрирование динамических уравнений, неявные схемы.

**CALCULATION OF PARTICLE DYNAMICS
IN RADIATIONLESS MODEL OF PLASMA***L. V. Borodachev, D. O. Kolomiets*

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

An implicit numerical scheme for the particle dynamics equations is considered taking into account the specifics of the Darwin model of plasma. The problems of its consistency, accuracy and stability are considered, showing the adequacy of transfer of basic physical effects related to the motion of charges in electromagnetic field. On the basis of the scheme proposed an optimal numerical algorithm, considering the problem of its effectiveness.

Key words: PIC, Particle-in-Cell, Vlasov-Darwin, particle dynamics, implicit scheme.

Введение

В настоящее время наиболее мощным инструментом численного анализа нелинейной плазмифизики является, как известно, дискретное моделирование методом макрочастиц (ММ) [1]. Однако, предоставляя наиболее полное описание кинетики самосогласованной плазмы, метод макрочастиц предъявляет исключительные требования к ресурсам вычислительных систем — памяти и производительности. Дело в том, что степень физической достоверности расчетов по ММ напрямую зависит от количества используемых модельных частиц (точнее, от величины их дебаевской плотности, приходящейся на одно измерение). При этом постоянно повышающиеся требования адекватности дискретного моделирования (в частности, увеличение фазовой размерности пространства, наряду с учетом все более тонких, как правило, нелинейных эффектов) подвигают численную постановку решаемых по ММ задач на грань возможностей существующих компьютеров. Учитывая принципиальные расхождения в количестве частиц реальной плазмы и ее модельных аналогов, очевидно, что в ближайшем будущем эту ситуацию вряд ли изменит даже тот колоссальный рост вычислительной мощности, который имел место в последние годы. Таким образом, разработка эффективных процедур численного решения различного класса дискретных плазменных моделей остается по-прежнему весьма актуальной.

В этой связи остановимся на одном существенном моменте процесса моделирования самосогласованной плазмы по ММ, который, достаточно условно, можно разделить на две основные части: разностное решение уравнений движения макрочастиц (нахождение их фазовых траекторий под действием силы Лоренца) и вычисление сеточных значений коллективных полей, связанных с частицами через моменты дискретной функции распределения (плотности заряда и тока, играющие роль источников в уравнениях поля). Хотя основные вычислительные затраты связаны с продвижением зарядов (в силу естественного соотношения $N_{part} \ll I_{cell}$), вопрос численной эффективности любого расчета по ММ надо рассматривать с учетом ограничений на параметры дискретизации как полевых, так и динамических уравнений, удовлетворяя, прежде всего, наиболее жесткому из них. Так, например, наиболее часто используемая в методе макрочастиц модель Власова—Максвелла с явной схемой интегрирования по времени динамических и полевых уравнений имеет два ограничения на шаг по времени, определяемые условием устойчивости: $\tau < 2/kc$ — для полевой схемы (где k — наибольшее волновое число свободного электромагнитного излучения в системе, c — скорость света) и $\tau < 2/\omega_{pe}$ — для динамической схемы (где ω_{pe} — ленгмюровская (электронная плазменная) частота). Поскольку период колебаний свободных электромагнитных волн много меньше периода плазменных колебаний, очевидна доминанта первого условия устойчивости (для «быстрых» движений) при выборе корректного временного шага эволюции всей системы полей и частиц. Отсюда, в контексте расчета динамики частиц, следуют два принципиально важных вывода. Во-первых, для разностного решения уравнений движения в полной электромагнитной модели можно использовать простейшие явные схемы, поскольку условие устойчивости для них будет удовлетворено автоматически. Во-вторых, интегрирование динамических уравнений с неадекватно мелким шагом приводит к существенному увеличению общего времени счета и, следовательно, неоправданным вычислительным потерям. Эти потери становятся особенно большими при численном анализе низкочастотных явлений плазмифики, где излишнее дробление временной шкалы присутствует в явной разностной аппроксимации уже самих электромагнитных взаимодействий.

Иная ситуация наблюдается при использовании в указанном (низкочастотном) классе плазменных явлений безызлучательного (дарвинского) описания коллективных полей. Формально последнее отличается от полного электромагнитного только отсутствием соленоидальной части тока смещения, что, однако, равносильно наличию мгновенного дальнего действия в системе [2]. Будучи проще максвелловского формализма, дарвинский, тем не менее, труднее поддается численной интерпретации в рамках самосогласованного подхода. Основной проблемой является несоответствие незапаздывающего характера приближения и гиперболической формы его представления, что при любой явной конечно-разностной аппроксимации уравнений поля приводит к неустраняемой численной неустойчивости. Внешне она проявляется в виде быстро нарастающего паразитного самовозбуждения системы, обусловленного мгновенной взаимоиндукцией соленоидальных электрических полей и токов, что сопровождается резким рассогласованием численного и аналитического решений.

В настоящее время с появлением методики решения дарвинских уравнений поля, основанной на их эллиптической переформулировке, указанную проблему, а вместе с ней и ограничение на временной шаг для полевой системы удалось снять

в принципе [2, 3, 4, 5, 6]. Таким образом, с позиций корректного счета по ММ здесь актуализируется условие устойчивости именно динамических схем. Чтобы в полной мере воспользоваться преимуществом безызлучательного моделирования в области низкочастотной плазмифики, представляется естественным избавиться от механического ограничения на τ и при численной аппроксимации динамических уравнений. Последнее с необходимостью предполагает использование неявных процедур их численного интегрирования.

Предметом настоящей работы является обобщение на многомерный случай неявной разностной схемы для уравнений движения частиц, впервые описанной в публикации [7] и успешно апробированной в рамках полуторамерного фазового представления самосогласованной дарвинской модели плазмы:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0}{\tau} = \frac{q}{2m} \left(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_1}{c} + \frac{\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0}{c} \right), \\ \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0}{\tau} = \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_0}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

В этой связи ниже детально рассматриваются основные свойства схемы, а также процедура ее численного решения и базовое методическое обоснование. Заметим, что внешний вид представленной схемы соответствует некоторому текущему переходу $t_0 \rightarrow t_1 = t_0 + \tau$ при стандартных обозначениях: q и m — заряд и масса частицы, (\mathbf{r}, \mathbf{v}) — ее фазовые координаты, (\mathbf{E}, \mathbf{B}) — значения электрического и магнитного полей в точке локализации частицы.

1. Свойства схемы

Здесь будут представлены традиционные аспекты анализа разностной схемы, позволяющие судить о ее качестве:

- согласованность (с дифференциальной системой);
- порядок аппроксимации;
- устойчивость схемы по начальным данным;
- численная эффективность.

Отдельно будет рассмотрен вопрос адекватности передачи схемой физических эффектов, заложенных в исходную систему дифференциальных уравнений.

1.1. Обратимость во времени. Одним из условий согласованности разностной схемы является сохранение временной симметрии (обратимости во времени), присущее дифференциальному аналогу. Для проверки этого свойства заменим в уравнениях (1) индекс 1 на индекс 0 и τ на $-\tau$:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1}{-\tau} = \frac{q}{2m} \left(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0}{c} + \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_1}{c} \right), \\ \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1}{-\tau} = \frac{\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1}{2}. \end{cases} \quad (2)$$

Как легко видеть, после приведения левых частей полученной системы выражения (1) и (2) становятся эквивалентными, то есть схема обратима во времени (при условии, что процедура вычисления полей также обладает этим свойством). Важно отметить физическое содержание этого вывода: в процессе эволюции модельная плазма не подвержена паразитному (численному) росту энтропии, что является обязательным требованием ее корректности.

1.2. Аппроксимация. Для исследования этого свойства воспользуемся стандартным (см., например, [8]) методом дифференциального приближения. Полагая τ малым и учитывая центрированность схемы, разложим все входящие в нее величины в ряд Тейлора около точки $(\mathbf{r}_{1/2}, t_{1/2})$, сохраняя члены второго порядка малости. После приведения подобных для первого уравнения системы (1) будем иметь

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} + \frac{\tau^2 \ddot{\mathbf{v}}}{24} + O(\tau^4) &= \frac{q}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) + \\ &+ \frac{q}{4m} \left(\tau |\delta \mathbf{r}| \dot{\mathbf{E}}' + \frac{1}{c} \left[\tau |\delta \mathbf{r}| \mathbf{v} \times \dot{\mathbf{B}}' + \tau |\delta \mathbf{r}| \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}' + \tau^2 \dot{\mathbf{v}} \times \dot{\mathbf{B}}' \right] \right) + O(\tau^4), \end{aligned} \quad (3)$$

а для второго

$$\dot{\mathbf{r}} + \frac{\tau^2 \ddot{\mathbf{r}}}{24} + O(\tau^4) = \mathbf{v} + \frac{\tau^2 \ddot{\mathbf{v}}}{8} + O(\tau^4). \quad (4)$$

Здесь штрих означает производную по направлению, а точка — производную по времени.

Учитывая, что схема (1) аппроксимирует фазовую траекторию частицы, положим

$$|\delta \mathbf{r}| = \tau \frac{|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_0|}{2}. \quad (5)$$

Отсюда окончательно получим

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}_{1/2} = \frac{q}{m} \left(\mathbf{E}_{1/2} + \frac{\mathbf{v}_{1/2} \times \mathbf{B}_{1/2}}{c} \right) + O(\tau^2), \\ \dot{\mathbf{r}}_{1/2} = \mathbf{v}_{1/2} + O(\tau^2). \end{cases} \quad (6)$$

Таким образом, считая $t_{1/2}$ текущей величиной, можно сделать следующие выводы.

Во-первых, при $\tau \rightarrow 0$ система (6) имеет в пределе дифференциальный аналог. Следовательно, учитывая временную обратимость схемы (1), можно констатировать, что она согласована, то есть является корректной аппроксимантой.

Во-вторых, невязка разностных уравнений (1) на точном решении исходной дифференциальной системы равна $O(\tau^2)$, то есть предлагаемая схема имеет второй порядок аппроксимации.

1.3. Устойчивость. Покажем, что рассматриваемая схема безусловно устойчива. Перепишем (1) следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{v_1 - v_0}{\tau} = \frac{1}{2m} (F_1(r_1, v_1) + F_0(r_0, v_0)), \\ \frac{r_1 - r_0}{\tau} = \frac{v_1 + v_0}{2}. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь для наглядности мы используем скалярную форму записи уравнений (1), которую можно понимать, например, как покомпонентную.

Для получения уравнений эволюции погрешности положим, что

$$\hat{r} = r + \varepsilon_r, \quad \hat{v} = v + \varepsilon_v.$$

Считая ε достаточно малым, разложим силу F в ряд Тейлора и вычтем из приближенных решений точные. Это дает при формальном переходе $t_1 = t_0 + \tau$ оценку

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 \leq -\frac{\tau}{2m} \begin{bmatrix} 0 & -m \\ D_r^2 & D_v^2 \end{bmatrix} (\varepsilon_1 + \varepsilon_0), \quad (8)$$

где

$$\varepsilon \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_v \end{bmatrix}, \quad D_r \equiv \max \left| \frac{dF}{dr} \right|, \quad D_v \equiv \max \left| \frac{dF}{dv} \right|.$$

Приводя в (8) подобные члены, будем иметь

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{\tau}{2} \\ \frac{\tau D_r^2}{2m} & 1 + \frac{\tau D_v^2}{2m} \end{bmatrix} \varepsilon_1 \leq \begin{bmatrix} 1 & \frac{\tau}{2} \\ -\frac{\tau D_r^2}{2m} & 1 - \frac{\tau D_v^2}{2m} \end{bmatrix} \varepsilon_0. \quad (9)$$

Обратная матрица для левой части неравенства (9) выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{4m + \tau^2 D_r^2 + 2\tau D_v^2} \begin{bmatrix} 4m + 2\tau D_v^2 & 2\tau m \\ -2\tau D_r^2 & 4m \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Отсюда легко получить явное выражение для оценки максимальной величины ε_1 :

$$\varepsilon_1 \leq \frac{1}{4m + \tau^2 D_r^2 + 2\tau D_v^2} \begin{bmatrix} 4m + 2\tau D_v^2 - \tau^2 D_r^2 & 4\tau m \\ -4\tau D_r^2 & 4m - 2\tau D_v^2 - \tau^2 D_r^2 \end{bmatrix} \varepsilon_0, \quad (11)$$

или, вводя обозначение матрицы перехода:

$$\varepsilon_1 \leq \mathbf{G} \varepsilon_0.$$

Как известно (см., например, [1]), для устойчивости разностной схемы достаточно выполнения условия:

$$|\lambda_{max}| \leq 1,$$

где $\lambda_{1,2}$ — собственные значения матрицы \mathbf{G} , равные

$$\lambda_{1,2} = \frac{4m - \tau^2 D_r^2 \pm 2\tau \sqrt{-4m D_r^2 + D_v^4}}{4m + \tau^2 D_r^2 + 2\tau D_v^2}. \quad (12)$$

Получим верхнюю оценку модулей собственных значений рассматриваемой матрицы \mathbf{G} . Используя неравенство треугольника (с учетом $\tau, m > 0$), будем иметь:

$$|\lambda_{1,2}| < \frac{4m + \tau^2 D_r^2 + 2\tau \sqrt{-4m D_r^2 + D_v^4}}{4m + \tau^2 D_r^2 + 2\tau D_v^2} \leq \frac{4m + \tau^2 D_r^2 + 2\tau D_v^2}{4m + \tau^2 D_r^2 + 2\tau D_v^2} = 1, \quad (13)$$

откуда следует, что при $\forall m, \tau > 0, \forall D_r, D_v$ значения $|\lambda_{1,2}| < 1$, то есть схема абсолютно устойчива (в заданных полях).

Из рассмотренных выше свойств аппроксимации и устойчивости следует сходимость схемы (1) со скоростью $O(\tau^2)$ или, что то же, ее второй порядок точности. Заметим, что из разумного удовлетворения актуального для любого расчета компромисса «цена — качество» схемы именно такого порядка традиционно используются в численных реализациях метода макрочастиц.

2. Численная реализация схемы

2.1. Процедура решения. Перейдем к построению алгоритма, реализующего рассматриваемую схему. Перепишем систему (1) так, чтобы искомые величины находились слева:

$$\mathbf{v}_1 - \mu \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_1 = \mu \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0 + \mu c (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_0), \quad (14)$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \tau \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_0}{2}, \quad (15)$$

где $\mu = q\tau/2mc$. Уравнение (15) уже разрешено относительно \mathbf{r}_1 , поэтому далее будем рассматривать только уравнение (14). Распишем его как систему трех скалярных уравнений:

$$\begin{cases} v_x^1 - \mu B_z^1 v_y^1 + \mu B_y^1 v_z^1 = v_x^0 + \mu B_z^0 v_y^0 - \mu B_y^0 v_z^0 + \mu c (E_x^1 + E_x^0), \\ \mu B_z^1 v_x^1 + v_y^1 - \mu B_x^1 v_z^1 = -\mu B_z^0 v_x^0 + v_y^0 + \mu B_x^0 v_z^0 + \mu c (E_y^1 + E_y^0), \\ -\mu B_y^1 v_x^1 + \mu B_x^1 v_y^1 + v_z^1 = \mu B_y^0 v_x^0 - \mu B_x^0 v_y^0 + v_z^0 + \mu c (E_z^1 + E_z^0). \end{cases}$$

Последняя в более удобной для наших целей матричной форме имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & -\mu B_z^1 & \mu B_y^1 \\ \mu B_z^1 & 1 & -\mu B_x^1 \\ -\mu B_y^1 & \mu B_x^1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x^1 \\ v_y^1 \\ v_z^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mu B_z^0 & -\mu B_y^0 \\ -\mu B_z^0 & 1 & \mu B_x^0 \\ \mu B_y^0 & -\mu B_x^0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x^0 \\ v_y^0 \\ v_z^0 \end{bmatrix} + \mu c \begin{bmatrix} E_x^1 + E_x^0 \\ E_y^1 + E_y^0 \\ E_z^1 + E_z^0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Обозначим левую и правую матрицы уравнения (16), соответственно, символами \mathbf{L} и \mathbf{R} . Тогда

$$\mathbf{T} \equiv \mathbf{L}^{-1} = \frac{1}{1 + \mu^2 |\mathbf{B}_1|^2} \begin{bmatrix} 1 + \mu^2 (B_x^1)^2 & \mu^2 B_x^1 B_y^1 + \mu B_z^1 & \mu^2 B_x^1 B_z^1 - \mu B_y^1 \\ \mu^2 B_x^1 B_y^1 - \mu B_z^1 & 1 + \mu^2 (B_y^1)^2 & \mu^2 B_y^1 B_z^1 + \mu B_x^1 \\ \mu^2 B_x^1 B_z^1 + \mu B_y^1 & \mu^2 B_y^1 B_z^1 - \mu B_x^1 & 1 + \mu^2 (B_z^1)^2 \end{bmatrix}.$$

Умножая уравнение (16) слева на \mathbf{T} , получим выражение для \mathbf{v}_1 , объединяя которое с выражением (15), приходим к базовой системе:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = \mathbf{T} (\mathbf{R}\mathbf{v}_0 + \mu c (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_0)), \\ \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \tau \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_0}{2}. \end{cases} \quad (17)$$

В силу неявности, процедура ее решения имеет вид итерационного процесса с обычной для двуслойных разностных схем структурой [8]. Тем не менее, он обладает некоторыми особенностями, на которых необходимо остановиться. Прежде всего, отсутствие в схеме перекрестных членов вида $(\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_1)$ и $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0)$ позволяет выделить все операции, производимые с величинами текущего временного слоя (имеющими индекс 0) в отдельный блок и вынести его за пределы итерационного цикла. Последнее, помимо чисто арифметических операций (операции умножения матрицы на вектор и сложение векторов $\mathbf{R}\mathbf{v}_0 + \mu c \mathbf{E}_0$), также выводит из итерационного цикла и операцию интерполяции сеточных значений текущих полей в точку нахождения частицы. Такая модификация фактически означает, что значительная часть вычислений производится уже не на каждой итерации, а лишь один раз для каждого временного шага, что снижает вычислительные затраты на одну итерацию примерно на 30% и приводит их к уровню, характерному для простейших явных схем.

Таким образом, настоящий итерационный процесс можно выразить следующим образом.

Стартовый этап:

$$\begin{cases} \vec{u}_0 = \mathbf{R}\mathbf{v}_0 + \mu c \mathbf{E}_0, \\ \vec{\xi}_0 = \mathbf{r}_0 + \tau \frac{\mathbf{v}_0}{2}. \end{cases} \quad (18)$$

При этом вычисленные величины \vec{u}_0 и $\vec{\xi}_0$ записываются на место значений \mathbf{v}_0 и \mathbf{r}_0 , а память, выделенная для хранения сеточных значений \mathbf{E}_0 и \mathbf{B}_0 , освобождается и возвращается системе.

Основной этап:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = \mathbf{T} (\vec{u}_0 + \mu c \mathbf{E}_1), \\ \mathbf{r}_1 = \vec{\xi}_0 + \tau \frac{\mathbf{v}_1}{2}, \end{cases} \quad (19)$$

где значения \mathbf{T} и \mathbf{E}_1 вычисляются заново на каждой итерации.

Тестовые расчёты показали высокую экономичность описанного алгоритма: в частности, на процессоре стандартной архитектуры с частотой 3.6 ГГц производительность данной программно реализованной схемы составляет примерно 3 миллиона частиц в секунду на итерацию (при использовании билинейной интерполяции полей).

2.2. Методическое обоснование. Рассмотрим работу схемы на примере двух базовых задач, связанных с основными видами дрейфовых движений частиц (см., например, в книге [9]) и позволяющих не только количественно оценить, но и наглядно продемонстрировать возникающие ошибки численного решения динамических уравнений.

В этих тестах мы воспользуемся специальной нормировкой, которая удобна для тестовых расчетов. Так, расстояние нормируется на ларморовский радиус $[r_L]$, время измеряется в величинах $[2\pi/\omega]$, где ω — циклотронная частота в исходной точке траектории в начальный момент времени, для индукции магнитного поля и напряженности электрического поля в качестве единиц используются, соответственно, величины $[m\omega/q]$ и $[mc\omega/q]$. Далее в квадратных скобках будут указываться нормирующие множители¹ («единицы измерения»), а сами величины будут безразмерными.

Начнем с электрического дрейфа в постоянных скрещенных полях.

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right), & \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \\ \mathbf{B} = \{0, 0, 1\}, & \mathbf{E} = \{0, 0.25, 0\}, & \mathbf{v}(0) = \{0, 1, 0\}, \\ \mathbf{r}(0) = 0, & q/m = 1, & c = 1, & t \in [0, 21]. \end{cases}$$

На рис.1 сплошной линией дано аналитическое решение задачи, пунктирные линии показывают расчетные траектории частиц при трех различных значениях временного шага τ .

Как видно из рис.1, схема адекватно воспроизводит электрический дрейф частицы. Однако при больших значениях τ существенной становится фазовая ошибка, проявляющая себя в виде «растяжения» циклотронной траектории вдоль линии дрейфа.

В качестве следующего теста рассмотрим задачу о поляризационном дрейфе, возникающем в переменном электрическом поле, направленном поперек магнитного поля:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m} \left(\mathbf{E}(t) + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right), & \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \\ \mathbf{B} = \{0, 0, 1\}, & \mathbf{E} = \{0, 0.06t, 0\}, & \mathbf{v}(0) = \{0, 1, 0\}, \\ \mathbf{r}(0) = 0, & q/m = 1, & c = 1, & t \in [0, 14]. \end{cases} \quad (20)$$

На рис.2, как и в предыдущем случае, сплошной линией дано аналитическое решение, а пунктирными линиями показаны численные решения для тех же значений временного шага, что и в случае электрического дрейфа.

¹Кроме случая, когда квадратные скобки явно обозначают отрезок времени.

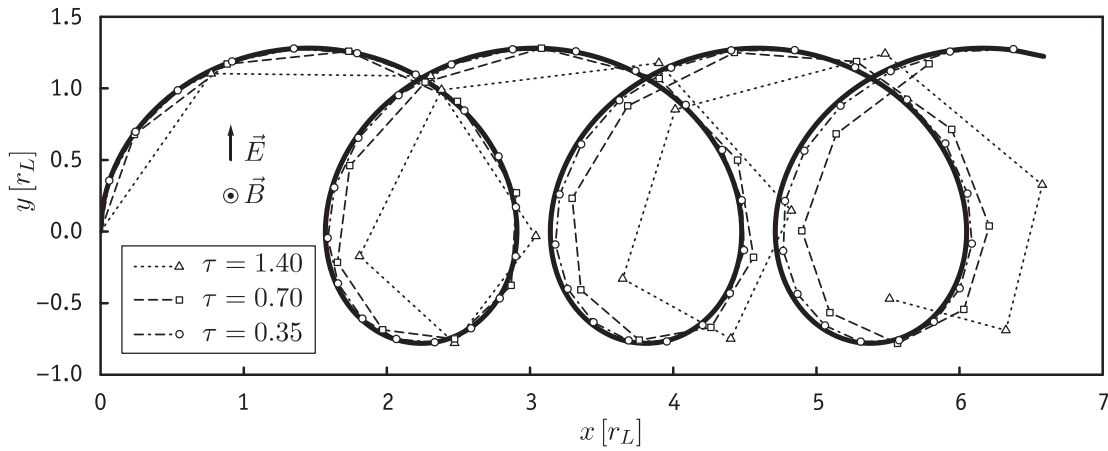


Рис. 1. Электрический дрейф. Сплошной линией показано аналитическое решение, три другие линии показывают расчетные траектории частицы при различных значениях шага по времени τ . Параметры задачи: $\mathbf{B} = \{0, 0, 1\} [m\omega/q]$, $\mathbf{E} = \{0, 0.25, 0\} [mc\omega/q]$, $\mathbf{v}_0 = \{0, 1, 0\} [r_L \omega/2\pi]$, $\mathbf{r}_0 = 0 [r_L]$, $t \in [0, 21] [2\pi/\omega]$, $q/m = 1$.

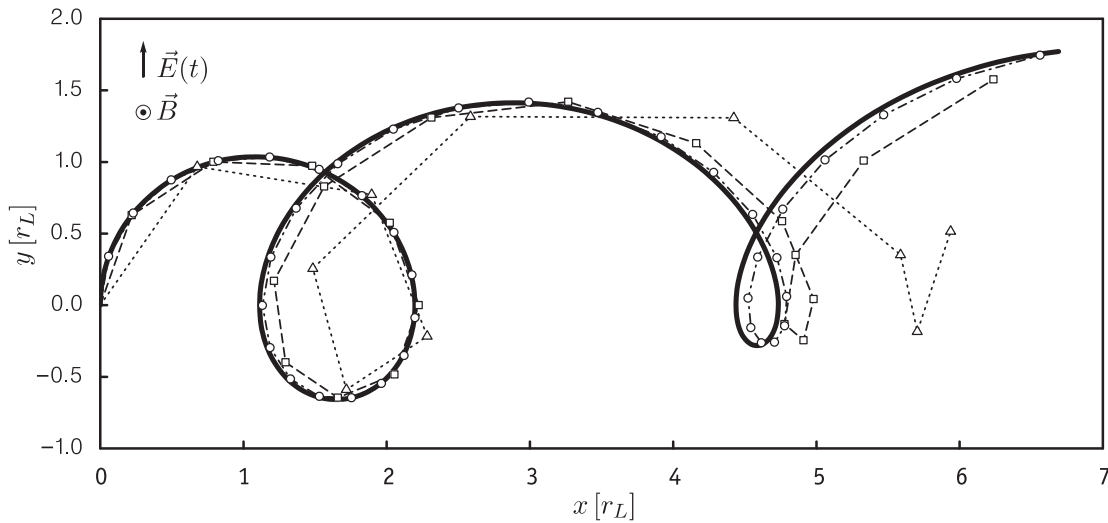


Рис. 2. Поляризационный дрейф. Сплошной линией показано аналитическое решение, пунктирные линии показывают расчетные траектории частицы при трех различных значениях шага по времени τ . Здесь выбраны те же значения τ , что и для случая электрического дрейфа, представленного на рис.1. Параметры задачи: $\mathbf{E} = \{0, 0.06t, 0\} [mc\omega/q]$, $\mathbf{B} = \{0, 0, 1\} [m\omega/q]$, $\mathbf{v}_0 = \{0, 1, 0\} [r_L \omega/2\pi]$, $t \in [0, 14] [2\pi/\omega]$, $q/m = 1$.

Как и ранее, схема физически корректно воспроизводит поляризационный дрейф заряда, но актуальной остается и проблема фазовой ошибки при больших шагах τ .

Заключение

Таким образом, в работе детально рассмотрена модифицированная схема неявного разностного интегрирования уравнений движения частиц в многомерной модели Власова—Дарвина. Показана ее (схемы) согласованность с исходной дифференциальной системой, традиционный для метода частиц второй порядок точности и безусловная устойчивость. На основе итерационных методов предложена экономичная процедура численного решения схемы. Тестовыми расчетами подтверждена ее адекватность при передаче сложных движений заряда в электромагнитном поле

В настоящее время представленный выше алгоритм расчета динамики частиц в дискретной безызлучательной модели плазмы программно реализован в рамках низкочастотного электромагнитного (магнитоиндукционного) кода **DarWin**, созданного авторами настоящей работы. Код был успешно использован не только в упомянутых выше расчетах по методическому обоснованию рассмотренной схемы, но и в реальных численных исследованиях многомерной вайбелевской неустойчивости [10, 11], где показал свою высокую эффективность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. – М.: Мир, 1987, 640 с.
2. Нильсон К., Льюис Г. Модели укрупненных частиц в безызлучательном пределе. В кн.: Управляемый термоядерный синтез. – М.: Мир, 1980, с.395–418.
3. Hewett D.W. Elimination of electromagnetic radiation in plasma simulation: the Darwin or magnetoinductive approximation // Space Science Reviews, v.42, 1985, 29–40.
4. Бородачѐв Л.В. Дарвинское описание самосогласованных электромагнитных полей плазмы и особенности его дискретной интерпретации. МГУ, Физический факультет, препринт №19/2000, 14 с.
5. Бородачѐв Л.В. Численная интерпретация полевого описания в дискретной дарвинской модели с неявной схемой расчѐта динамики частиц // Мат. моделирование, 2005, т.17, № 9, с.53–59.
6. Бородачѐв Л.В., Мингалѐв И.В., Мингалѐв О.В. Численное решение дискретной модели Власова—Дарвина на основе оптимальной переформулировки полевых уравнений // Мат. моделирование, 2006, т.18, № 11, с.117–125.
7. Бородачѐв Л.В. Неявная аппроксимация уравнений движения дарвинской модели плазмы. // ЖВММФ, 1991, т.30, № 6, с.934–939.
8. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977, 656 с.
9. Франк-Каменецкий Д.А. Лекции по физике плазмы. – М.: Атомиздат, 1964, 288 с.
10. Бородачѐв Л.В., Коломиец Д.О. Электронная вайбелевская неустойчивость плазмы с температурной анизотропией / Вестн. МГУ. Сер. 3, 2010, т.65, № 2, с.15–19.
11. Borodachev L.V., Kolomiets D.O. Single-species Weibel instability of radiationless plasma. // J. Plasma Physics, DOI:10.1017/S0022377810000188, 2010.

Поступила в редакцию 25.06.2010.